Компьютерные инструменты в образовании, 2016
№ 3: 25–31
УДК: 519
http://ipo.spb.ru/journal

нерешённые задачи для молодых учёных
x+y=?

О НЕСКОЛЬКИХ НАПРАВЛЕНИЯХ КОМПЬЮТЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В КОМБИНАТОРИКЕ И ГЕОМЕТРИИ*

Райгородский А.М.[1]

[1]МФТИ(ГУ), Москва, Россия

Аннотация

В статье приводятся некоторые классические задачи комбинаторики, которые в том числе можно решать с помощью компьютера. Среди этих задач проблема Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра и задачи теории Рамсея.

Ключевые слова: *дистанционный граф, граф диаметров, число Рамсея, хроматическое число, проблема Борсука.*

Цитирование: Райгородский А.М. О нескольких направлениях компьютерных исследований в комбинаторике и геометрии // Компьютерные инструменты в образовании, 2016. № 3. С. 25–31 .

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная комбинаторика богата огромным количеством глубоких и интересных задач, которые, однако, с трудом поддаются решению. Пафос этой заметки в том, что, по-видимому, некоторые из этих задач можно решать с помощью компьютера. Мы постараемся привести здесь такие примеры, которые доступны студентам младших курсов или даже сильным школьникам как по своим постановкам, так и по возможным методам компьютерного анализа.

2. ПРОБЛЕМА БОРСУКА

Одна из самых замечательных проблем комбинаторной геометрии — это проблема Борсука, поставленная в 1933 году. Про нее написано множество книг и обзоров, среди которых [1–11]. Здесь мы остановимся на наиболее важных для нашего изложения вехах в истории задачи.

Для начала рассмотрим произвольное множество точек F на плоскости. Множество может быть и конечным, и целой фигурой, и какой-нибудь неизмеримой «бякой» — любое. Его *диаметр* — это максимум расстояний между точками в нем. Вернее, supremum, так как максимум может и не достигаться, но сути это не меняет. Конечно, если множество F неограниченное, то его диаметр — бесконечность, а если оно состоит из всего одной точки, то его диаметр — ноль. Такие случаи мы рассматривать не будем. Нам хочется разбить множество F на части строго меньшего диаметра. При этом мы стараемся

*Настоящая работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект N 15-01-03530).
Статья написана на основе лекции, прочитанной в СПбГЭТУ «ЛЭТИ» 18 мая 2016 года (*Прим. ред.*).

минимизировать число частей. Образно говоря, F — это вкусный торт, который не пролезает к нам в рот и который мы хотим съесть как можно быстрее. Правда, торт может быть и весьма странной формы.

Приведем примеры. Пусть F — квадрат со стороной 1. Его диаметр — это длина его диагонали, то есть $\sqrt{2}$. Очевидно, любое разрезание такого «торта» прямой линией, не проходящей по диагонали, дает два куска меньшего диаметра, и это оптимально.

Пусть теперь F состоит из трех точек — вершин правильного треугольника со стороной 1. Его диаметр 1. Но его придется резать уже на три части, ведь любые две точки по-прежнему образуют кусок диаметра 1. Несколько более трудным является аналогичное утверждение о круге: круг тоже нельзя разбить на две части меньшего диаметра. Интуитивно утверждение понятно, но формальное доказательство требует небольших усилий, и тут мы его не приводим.

Может быть, бывают множества, еще менее податливые, нежели вершины правильного треугольника или круг? Нет, оказывается, всякое множество можно разбить на 3 части меньшего диаметра! Идея следующая. Пусть диаметр F равен 1. Мы можем так считать, не ограничивая общности, ведь, научившись разбивать на части меньшего диаметра множества диаметра 1, мы с помощью гомотетии разобьем и любое ограниченное множество. Найдем теперь такое множество U, что каждое множество диаметра 1 можно движением загнать внутрь U. Ясно, что такие множества существуют. Например, заведомо множество диаметра 1 накрывается квадратом со стороной 1. При этом, разумеется, мы не утверждаем, что диаметр такой *универсальной покрышки* равен 1. Тот же квадрат имеет диаметр $\sqrt{2}$. Тем не менее, если мы разобьем универсальную покрышку на сколько-то частей с диаметром, строго меньшим единицы, то мы и каждый «торт», таким образом, разрежем. Нетрудно видеть, что квадрат со стороной 1 на три части не разбивается. Что же делать? Искать более экономную покрышку! Оказывается, такая покрышка — правильный шестиугольник с расстоянием 1 между параллельными сторонами. Любопытно, что весьма непросто доказать про него, что он действительно служит покрышкой. Очень изящное доказательство приведено в замечательной старой книге [9]. На рис. 1 мы показываем, как надо разбить эту покрышку на 3 части. Легко посчитать, что диаметры частей суть $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

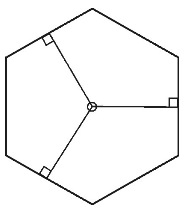

Рис. 1

Стоит отметить, что круг диаметра 1 нельзя разбить на 3 части, у каждой из которых диаметр был бы строго меньше, чем $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Это говорит о том, что $\frac{\sqrt{3}}{2}$ — в некотором смысле оптимальный диаметр части в разбиении произвольного множества диаметра 1 на плоскости.

Отдельный интерес представляют конечные множества точек. Для них можно дать теоретико-графовую интерпретацию минимального числа частей меньшего диаметра, на которые они разбиваются. А именно, пусть F — конечное множество точек на плоскости. Соединим отрезком каждые две точки, реализующие максимум расстояний среди точек множества F. Получится так называемый *граф диаметров*. Напомним, что *хрома-*

тическим числом графа G называется величина $\chi(G)$, равная наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все вершины G, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Так вот несложно видеть, что если G — граф диаметров с вершинами из конечного множества F, то $\chi(G)$ — это и есть минимальное число частей меньшего диаметра в разбиении F!

Отметим, что конечность F важна. Например, окружность радиуса 1 нельзя разбить на 2 части меньшего диаметра, но если с ней связать граф диаметров по стандартному принципу, то получится паросочетание — набор из попарно несмежных ребер, у которого хроматическое число, конечно, равно двум.

В размерности 3 имеет место аналогичная задача. Аналогом треугольника здесь служит правильный тетраэдр, показывающий, что трех частей хватит уже не всегда. Также работают и универсальные покрышки. А именно, используется усеченный специальным образом правильный октаэдр, и подробности, опять же, можно найти в книге [9]. Важно, что и здесь четыре — точная граница, то есть четырех частей всегда хватает.

Однако если на плоскости была оптимальная константа $\frac{\sqrt{3}}{2}$, то в трехмерном пространстве такое число пока не найдено, и это важная открытая проблема — первая из тех, о которых мы хотим поговорить.

Сейчас с помощью универсальных покрышек показано (см. [6]), что каждое множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^3$ можно разбить на 4 части с диаметрами, не большими 0.98. В то же время известно, что шар диаметра 1 нельзя так разбить на 4 части, чтобы диаметр каждой из них оказался меньше величины

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} = 0.888\ldots$$

Получается, что пока зазор весьма значителен, ведь в масштабах единицы он составляет практически 10 процентов.

Кажется почти безнадежным улучшить нижнюю оценку 0.888. Была даже гипотеза Гэйла, что «хуже шара зверя нет». Но доказать или опровергнуть ее не удается. Гораздо более перспективно уточнение верхних оценок. И вот здесь вполне мог бы помочь компьютер. Идея следующая. Допустим, мы знаем некоторую универсальную покрышку U. Для примера рассмотрим тот же правильный шестиугольник на плоскости. Пусть его вершины суть A, B, C, D, E, F (см. рис. 2). Рассмотрим пары противоположных вершин, скажем, A и D. Проведем диагональ AD и две прямые, которые ей перпендикулярны и отстоят от центра шестиугольника на расстояние $1/2$. Ясно, что если множество F, имеющее диаметр 1, покрыто шестиугольником U, то его точки не могут лежать одновременно в треугольниках с вершинами A и D (между такими точками расстояние больше 1). Это означает, что покрышку можно усечь, удалив один из треугольников, причем новое множество снова будет покрышкой. Но это только для одной пары противоположных вершин. Если брать все-таки все пары в расчет, то получится такое утверждение: *любое множество диаметра 1 может быть покрыто либо первым, либо вторым множеством, представленном на рис. 3*. Возникает уже не покрышка, но *универсальная покрывающая система (у.п.с.)*. Разбивая наиболее экономным образом каждое множество в ней, можно добиться лучших оценок, нежели те, что получены с помощью одной покрышки! Разумеется, на плоскости уже покрышки решают все, но вот для пространства у.п.с. крайне перспективны.

Причем здесь компьютер? Совершенно ясно! Построим мы у.п.с. из тысяч элементов (а почему нет?), и как мы без компьютера сможем их все разбить?

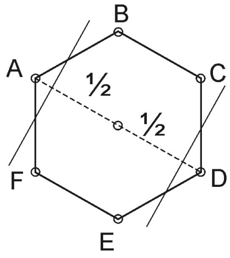

Рис. 2

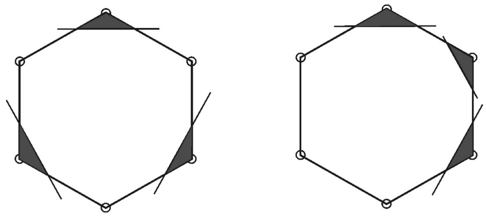

Рис. 3

Но это еще не все. Дальше начинаются размерности $n \geq 4$. Мы не будем вдаваться в подробности, благо вся эта история красочно изложена во многих уже цитированных нами источниках. Суть в том, что долгое время люди верили в справедливость следующего утверждения, которое принято называть гипотезой Борсука:

Любое множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^n$ *разбивается на* $n+1$ *часть меньшего диаметра.*

Это прекрасно коррелирует с тем, о чем мы говорили ранее, ведь при $n = 2$ хватает именно трех, а при $n = 3$ — в аккурат четырех частей. При этом нижняя оценка $n+1$ мгновенно следует из рассмотрения множества вершин правильного n-мерного симплекса — аналога треугольника на плоскости и тетраэдра в пространстве.

Гипотеза, к сожалению, не верна. Ее «с треском» опровергли в 1993 году Кан и Калаи. Сейчас известно, что гипотеза заведомо ошибочна, начиная с размерности 64. Но даже в размерности 4 не известен ответ! Известно лишь, что всегда возможно разбиение на 9 частей, и это опять универсальные покрышки. Быть может, тут помогут у.п.с. и их обсчет на компьютере?

А в завершение этого раздела самое любопытное и перспективное. Оказывается, все контрпримеры к гипотезе Борсука представляют собой конечные множества точек. Иными словами, всякий раз, строя контрпримеры, мы доказываем, что (см. [8]) хроматическое число некоторого графа диаметров достаточно велико (больше, чем $n+1$). Более того, очень многие контрпримеры строятся на основе точек с координатами 0 или 1 или точек с координатами $-1, 0, 1$. Возникает вопрос: может, в малых размерностях у графов с такими вершинами все-таки хроматические числа не превосходят $n+1$? Начиная с какой размерности, эти графы реально работают на опровержение гипотезы? Этот вопрос изучала команда Циглера в Германии (см. [12]). А недавно В.Б. Гольдштейн написал замечательную кандидатскую диссертацию, в которой использовал компьютерные расчеты для улучшение результатов Циглера и их распространения на случай совокупностей точек с координатами $-1, 0, 1$. Сейчас известно, что в случае нулей и единиц гипотезу не удастся опровергнуть до размерности 9 включительно, а в случае $-1, 0, 1$ — до размерности 6 (см. [13]). Это настоящее торжество алгоритмики и программирования, так как известно, что нахождение хроматического числа графа — это NP-трудная задача, а «тупой» перебор в размерности 9 требует отыскания раскрасок для $2^{2^9} = 2^{512}$ графов!

Было бы замечательно продвинуться в этой задаче.

3. ЧИСЛА РАМСЕЯ

Еще одна классическая задача комбинаторики — это задача отыскания так называемых *чисел Рамсея*. Мы рассмотрим только наиболее активно изучаемый случай — случай, в котором речь идет о графах. Напомним, что K_n — это стандартное обозначение для полного графа на n вершинах, то есть графа, в котором проведены все возможные C_n^2

ребер (кратных ребер, ориентации и петель у нас нет). Фиксируем $s, t \in \mathbb{N}$. Числом Рамсея $R(s,t)$ называется минимальное число $n \in \mathbb{N}$, такое, что при любой раскраске ребер K_n в красный и синий цвета либо найдется K_s, у которого все ребра красные, либо отыщется K_t, у которого все ребра синие.

Хорошо известен частный случай задачи о числах Рамсея — утверждение, что среди любых шести человек либо трое попарно знакомы, либо трое попарно не знакомы. В терминах чисел Рамсея это утверждение говорит, что $R(3,3) \le 6$, ведь мы вполне можем красить ребра графа K_6 по правилу «знакомы — красное», «не знакомы — синее».

Можно чуть изменить основное определение. Напомним, что *клика* в графе — это любой его полный подграф. Одна вершина — тоже клика. А *независимое множество* вершин — множество, никакие две вершины в котором не соединены ребром. Одна вершина — это и независимое множество, и клика одновременно. Можно сказать так: $R(s,t)$ — это минимальное число $n \in \mathbb{N}$, такое что для любого графа на n вершинах либо в нем есть клика размера s, либо в нем есть независимое множество вершин размера t. Напомним еще, что *дополнением* графа G называется граф $\overline{G}$: в нем проведены те и только ребра, которых нет в графе G. Тогда $R(s,t)$ — это минимальное число $n \in \mathbb{N}$, такое что для любого графа на n вершинах либо в нем есть клика размера s, либо в его дополнении есть клика размера t. И, совершенно симметрично, $R(s,t)$ — это минимальное число $n \in \mathbb{N}$, такое что для любого графа на n вершинах либо в нем есть независимое множество вершин размера s, либо в его дополнении есть независимое множество вершин размера t.

Как ни крути определение, а проще не становится. Очевидно лишь, что $R(1,t) = 1$, а $R(2,t) = t$. Дальше темный лес. Подробности о числах Рамсея можно найти и на Википедии, и в книгах [14–16]. Мы же сейчас поймем, причем здесь компьютер, и, главное, обсудим одну недавнюю и очень интересную вариацию задачи.

Компьютер, конечно, по делу. Действительно, допустим, мы знаем, что $R(5,5) \le 200$. Значит, нужно посмотреть все графы на не более двухстах вершинах и проверить, правда ли, что для каждого из них либо в нем, либо в его дополнении есть независимое множество вершин размера 5. Правда, тут дела не лучше, чем в проблеме Борсука в малых размерностях: «тупой» перебор задействует более $2^{C_{200}^2} = 2^{19900}$ графов! Таким образом, нужны и алгоритмические идеи, и хорошее программирование. Разумеется, это никак не поможет найти асимптотические оценки, то есть оценки величин типа $R(s,s)$ при $s \to \infty$. Для этого есть глубокая математика. Но интерес к значениям чисел Рамсея при «малых» s и t от этого не слабеет. Это особенно хорошо видно из обзорной статьи [17].

А теперь о новой задаче. Как мы помним, проблема Борсука тесно связана с графами диаметров. Есть еще одна классическая проблема комбинаторной геометрии — проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера (см. [3, 7, 8, 10, 18]). Здесь не столь важна ее суть, сколь те графы, которые возникают в связи с ней, так называемые *графы расстояний* (или *дистанционные графы*). Итак, $G = (V,E)$ дистанционный, если $V \subset \mathbb{R}^n$ с некоторым n и

$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}$$

с некоторым $a > 0$. Иными словами, мы соединяем ребрами те и только те вершины, которые отстоят друг от друга на заданное наперед расстояние a. При $a = 1$ говорят о *графах единичных расстояний*.

Отметим, что независимое множество вершин изоморфно некоторому графу единичных расстояний в любой размерности. Достаточно лишь расставить вершины на больших единицы расстояниях друг от друга. Это наводит на мысль о введении следующего *дистанционного числа Рамсея* $R_{\text{dist}}(s,t;d)$: это минимальное $n \in \mathbb{N}$, при котором для любого графа G на n вершинах либо в G есть порожденный подграф, изоморфный некоторому графу единичных расстояний на s вершинах в $\mathbb{R}^d$, либо в $\overline{G}$ есть порожденный подграф, изоморфный некоторому графу единичных расстояний на t вершинах в $\mathbb{R}^d$. Тут надо пояснить, что, когда мы говорим «порожденный подграф», мы имеем в виду, что это подграф $H = (W, F)$ графа $G = (V, E)$, у которого $W \subseteq V$ и, главное, для любых вершин $w_1, w_2 \in W$ если они образуют ребро из множества E, то они образуют и ребро из множества F. На рис. 4 приведены примеры порожденных и не порожденных подграфов. Часто еще говорят «индуцированных».

Рис. 4

Получается, что, так как независимое множество всегда реализуется графом единичных расстояний, то $R_{\text{dist}}(s, t; d) \le R(s, t)$. Оказывается, есть и куда более хитрые соотношения. Однако к настоящему времени более или менее исчерпывающе исследован только случай, когда $s = t$ и $s \to \infty$ (см. [19, 20]).

Таким образом, совершенно естественная и, несомненно, подъемная задача состоит в отыскании или получении оценок чисел $R_{\text{dist}}(s, t; d)$ при различных конкретных «малых» значениях параметров.

Список литературы

1. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2015.
2. *Raigorodskii A.M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // "Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics", AMS, Contemporary Mathematics, 2014. № 625. P. 93–109.
3. *Raigorodskii A.M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer, 2013. P. 429–460.
4. *Raigorodskii A.M.* Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series, 2007. № 347. P. 202–248.
5. *Raigorodskii A.M.* The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary // Mathematical Intelligencer, 2004. Vol. 26, № 3. P. 4–12.
6. *Райгородский А.М.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика», 2007. № 23. С. 147–164.
7. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // Успехи математических наук, 2001. Т. 56, № 1. С. 107–146.
8. *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.
9. *Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: «Наука», 1965.
10. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometr. NY: Springer, 2005.
11. *Boltyanski V.G., Martini H., Soltan P.S.* Excursions into combinatorial geometry. Universitext, Berlin: Springer, 1997.
12. *Ziegler G.M.* Coloring Hamming graphs, optimal binary codes, and the 0/1 — Borsuk problem in low dimensions. Lect. Notes Comput. Sci., 2001. № 2122. P. 159–171.
13. *Гольдштейн В.Б.* О проблемах Борсука и Грюнбаума для (0,1)- и $(-1, 0, 1)$-многогранников в пространствах малой размерности // Канд. диссертация, 2013.
14. *Райгородский А.М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО. 2016.
15. *Райгородский А.М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.
16. *Graham R.L., Rothschild B.L., Spencer J.H.* Ramsey theory. NY: John Wily and Sons, Second Edition, 1990.

17. *Radziszowski S.*Small Ramsey Numbers // Dynamic Survey $\sharp DS1$: Jan 12, 2014.
18. *Райгородский А.М.* Хроматические числа. М.: МЦНМО, 2015.
19. *Титова М.В.* Комбинаторные и вероятностные методы в задачах о геометрических числах Рамсея // Канд. диссертация, 2013.
20. *Alon N., Kupavskii A.* Two notions of unit distance graphs // Comb. Theory, Ser. A 125 (2014). P. 1–17.

Поступила в редакцию 17.05.2016, окончательный вариант — 09.06.2016.

Computer tools in education, 2016

№ 3: 25–31

http://ipo.spb.ru/journal

ON SEVERAL DIRECTIONS OF COMPUTER-AIDED INVESTIGATIONS IN COMBINATORICS AND GEOMETRY

Raigorodskiy A.M.[1]

[1] MIPT (SU), Moscow, Russia

Abstract

In the paper we present some classical problems of combinatorics, which admit computer-aided solutions. Among these problems, we have Borsuk's problem on partitioning sets into parts of smaller diameter and problems of Ramsey theory.

Keywords: *distance graph, graph of diameters, Ramsey number, chromatic number, Borsuk's problem.*

Citation: Raigorodskiy A.M. 2016, "O neskol'kikh napravleniyakh komp'yuternykh issledovanii v kombinatorike i geometrii" ["On Several Directions of Computer-Aided Investigations in Combinatorics and Geometry"], *Computer tools in education*, no 3, pp. 25–31.

Received17.05.2016, the final version — 09.06.2016.

Andrey M. Raigorodskiy, laboratory of advanced combinatorics and network applications: department of discrete mathematics; mechanics and mathematics faculty, department of mathematical statistics and random processes MIPT (SU), 127018 Russia, 141701, Moscow region, Dolgoprudny, Institutskiy Lane, 9. mraigor@ya.ru

---

Райгородский Андрей Михайлович, доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, заведующий лабораторией продвинутой комбинаторики и сетевых приложений МФТИ, заведующий кафедрой дискретной математики МФТИ, профессор мехмата МГУ, профессор Бурятского ГУ, 141701, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, mraigor@ya.ru

© Наши авторы, 2016.
Our authors, 2016.